# オプション講座
# 「アンリ・カルタン『複素函数論』を読む」[*]
# 第 2 回 講義報告[†]

数学工房[‡]

2008 年 5 月 28 日　19：00 ～ 21：00

**概要**

まず，形式的ベキ級数の演算と認容族について前回のまとめを行い，次に，形式的ベキ級数の乗法に関する逆級数ならびに単元と逆元を解説して，単元に関する重要な定理を導いた．そして，形式的ベキ級数の微分について項別微分，和・積・商の微分，逐次微分などを詳しく検討し，さらに，形式的ベキ級数の合成に関する逆級数に係わる重要な定理を導いた．

## 1　形式的ベキ級数

### 1.1　前回のまとめ

#### 1.1.1　形式的ベキ級数の演算

1) $\mathrm{Map}(\mathbb{N}_0, K)$；$K$- 値数列の作る $K$ 上の線型空間は，次の加法とスカラー倍が定義され，

$$\begin{cases} (a+b)(n) := a(n) + b(n) \\ (\lambda a)(n) := \lambda(a(n)) \end{cases} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

さらに，その線型空間の上に，Cauchy 積と呼ばれる自然な積が存在する．すなわち，

$$\begin{aligned}(a * b)(n) :&= \sum_{j+k=n} a(j)b(k) \\ &= \sum_{j=0} a(j)b(n-j)\end{aligned}$$

これを，$(\mathrm{Map}(\mathbb{N}_0, K),\ +,\ \cdot,\ *)$ を記す．

---

[*] 本講座では，Henri Cartan 著「複素函数論」を教科書として，複素解析の基礎を学習する．予習・復習を前提とし，読みにくい場所，問題にしていることは何か，そこに至る背景は何かなどといったことに焦点を絞り解説する．高橋禮司訳（岩波書店）の本は絶版であるが，古書として入手可能である．

[†] reported by S.K.

[‡] http://www.sugakukobo.com

2) $\mathrm{Map}(\mathbb{N}_0, K)$ は，線型演算と Cauchy 乗法によって単位を持つ可換代数となる．

$$\begin{cases} (a*b)*c = a*(b*c) \\ a*b = b*a \\ a*e = e*a = a \\ \quad \text{ここで，} e(n) := \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \geqq 1) \end{cases} \text{とする．} \\ a*(b+c) = a*b + a*c \\ \lambda(a*b) = \lambda a * b = a * \lambda b \end{cases}$$

3) 数列の空間と形式的ベキ級数の空間が完全に同型対応になっている．

$$\Phi : \mathrm{Map}(\mathbb{N}_0, K) \ni a \longmapsto \sum_{\nu \geq 0} a(\nu) x^\nu \in K[[x]]$$

ここで，$\Phi$ は，$K$ 上の可換代数 $\mathrm{Map}(\mathbb{N}_0, K)$ と $K[[x]]$ の間の同型写像である．すなわち，

$$\begin{aligned} &\Phi(\lambda a + \mu b) = \lambda\Phi(a) + \mu\Phi(b) && \text{（線型としての同型）} \\ &\Phi(a*b) = \Phi(a)*\Phi(b) && \text{（環としての同型）} \end{aligned}$$

### 1.1.2 認容族の概念の応用

1) $e_k(x) = \sum_{\nu \geq 0} \delta_k(\nu) x^\nu$ とする．任意の $f \in K[[x]]$ に対して，$\{\widehat{f}(\nu) e_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ は認容族だから，$\sum_{\nu \geq 0} \widehat{f}(\nu) e_\nu$ は意味を持ち，$f = \sum_{\nu \geq 0} \widehat{f}(\nu) e_\nu$ が成立する．認容族の概念により，ベキ級数の形式的記号 $\sum$ が「ベキ級数の和の一般化」としてとらえられるのである．

$\omega(f) = \nu_0$ とすると，

$$\begin{aligned} f &= e_{\nu_0} \sum_{\nu \geq \nu_0} \widehat{f}(\nu) e_{\nu - \nu_0} \\ &= e_{\nu_0} \sum_{\nu \geq 0} \widehat{f}(\nu + \nu_0) e_\nu \\ &\quad \text{ただし，} \widehat{f}(\nu_0) \neq 0 \end{aligned}$$

2) $\sum_{\nu=0}^{m} \widehat{f}(\nu) e_\nu$ なる形の式を多項式と同一視する．すなわち，

$$\tau : K[[x]] \ni \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu x^\nu}_{\text{多項式として}} \longmapsto \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu e_\nu}_{\text{認容族として}} \in K[[x]]$$

$\tau$；埋め込み写像（単射，可換環の準同型）

## 1.2　形式的ベキ級数の乗法に関する逆級数

### 1.2.1　乗法に関する逆級数

多項式 $1-y$ の $K[[x]]$ における逆元を考える上で，対応するベキ級数 $e_0 - e_1 \in K[[y]]$ の逆元について検討する．

$$\begin{aligned}
\underbrace{(e_0 - e_1)\sum_{\nu\geq 0} e_\nu}_{(1-y)\sum_{\nu\geq 0} y^\nu \text{ のこと}} &= e_0 \sum_{\nu\geq 0} e_\nu - e_1 \sum_{\nu\geq 0} e_\nu \\
&= \sum_{\nu\geq 0} e_0 e_\nu - \sum_{\nu\geq 0} e_1 e_\nu \\
&= \sum_{\nu\geq 0} e_\nu - \sum_{\nu\geq 0} e_{\nu+1} \\
&= \sum_{\nu\geq 0} e_\nu - \sum_{\nu\geq 1} e_\nu = e_0
\end{aligned}$$

まとめると，

$$(e_0 - e_1)\sum_{\nu\geq 0} e_\nu = e_0$$

$e_0 - e_1$ は，逆元 $\sum_{\nu\geq 0} e_\nu \in K[[x]]$ を持つ．これを，通常，$1-y$ は形式的ベキ級数としての逆元 $\sum_{\nu\geq 0} y^\nu$ を持つといい，

$$\frac{1}{1-y} := \sum_{\nu\geq 0} y^\nu$$

と記す．

### 1.2.2　単元と逆元

**定義 1.1**　$f \in K[[x]]$ に対して，$g \in K[[x]]$ が存在して，

$$fg = 1 \quad \text{かつ} \quad gf = 1$$

を満たすとき，$f$ を $K[[x]]$ の**単元**，$g$ を $f$ の乗法に関する**逆元**といい，

$$g = f^{-1}$$

と記す．また，$K[[x]]$ の単元全体の集合を $(K[[x]])^\times$，または，$K[[x]]^\times$ と記す．

**定理 1.1**　$f \in K[[[x]]$ が単元である必要十分条件は，

$$f(0) \neq 0$$

である．

定理 1.1 を 2 つの異なるアプローチにより証明した．

**例題 1.1** 次を示せ．

1) $f, g \in K[[x]]^\times \implies fg \in K[[x]]^\times$，このとき，$(fg)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$
2) $e_0 \in K[[x]]^\times$
3) $f \in K[[x]]^\times \implies f^{-1} \in K[[x]]^\times$，このとき，$(f^{-1})^{-1} = f$

### 1.2.3　有理多項式

有理多項式空間

$$F(x) = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; q(0) \neq 0,\ p, g \in K[x] \right\}$$

において，$p, q \in K[[x]]$ と見なせる．

$q(0) \neq 0$ だと，$q^{-1} \in K[[x]]$ だから，$\dfrac{p}{q} \in F[x]$ と $pq^{-1} \in K[[x]]$ が同一視できる．すなわち，

$$F[x] \subset K[[x]]$$

と見てよい．

**■例**　$\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} \in K[[x]]$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$
$$1 = A(x-2) + B(x-1)$$
$$x = 1 \text{ を代入}\quad A = -1$$
$$x = 2 \text{ を代入}\quad B = 1$$
$$\therefore \quad \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{\nu \geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{\nu \geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu + \sum_{\nu \geq 0} x^\nu = \sum_{\nu \geq 0}\left(1 - \frac{1}{2^{\nu+1}}\right)x^\nu$$

## 1.3　形式的ベキ級数の微分

### 1.3.1　微分の定義；項別微分

$f = \displaystyle\sum_{\nu \geq 0} \widehat{f}(\nu) x^\nu$ とする．

$$\begin{aligned}(\partial f)(x) :&= \sum_{\nu \geq 1} \nu \widehat{f}(\nu) x^{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu \geq 0} (\nu+1)\widehat{f}(\nu+1) x^\nu\end{aligned}$$

$$\partial : K[[x]] \longrightarrow K[[x]]$$

### 1.3.2　和と積，商の微分

**定理 1.2**　$f, g \in K[[x]]$，$\alpha, \beta \in K$ とする．

$$
\begin{aligned}
&\partial(\alpha f + \beta g) = \alpha(\partial f) + \beta(\partial g) && \text{（線型性）} \\
&\partial(fg) = (\partial f)g + f(\partial g) && \text{（Leibniz 則）}
\end{aligned}
$$

これらから，次が導かれる．

**系 1.1**

$$
\partial\left(\frac{g}{f}\right) = -\frac{(\partial f)g - f(\partial g)}{f^2}
$$

定理 1.2 の Leibniz 則について，Cartan とは異なる証明を示した．

### 1.3.3　逐次微分と $K[[x]]$ の係数

1 次微分

$$
\begin{aligned}
\partial f &= \sum_{\nu \geq 1} \nu \widehat{f}(\nu) x^{\nu-1} \\
&= \sum_{\nu \geq 0} (\nu+1) \widehat{f}(\nu+1) x^{\nu}
\end{aligned}
$$

2 次微分

$$
\begin{aligned}
\partial^2 f &= \partial(\partial f) \\
&= \partial\left(\sum_{\nu \geq 0} (\nu+1) \widehat{f}(\nu+1) x^{\nu}\right) \\
&= \sum_{\nu \geq 1} (\nu+1)\nu \widehat{f}(\nu+1) x^{\nu-1} \\
&= \sum_{\nu \geq 0} (\nu+2)(\nu+1) \widehat{f}(\nu+2) x^{\nu}
\end{aligned}
$$

3 次微分

$$
\begin{aligned}
\partial^3 f &= \partial(\partial^2 f) \\
&= \partial\left(\sum_{\nu \geq 0} (\nu+2)(\nu+1) \widehat{f}(\nu+2) x^{\nu}\right) \\
&= \sum_{\nu \geq 1} (\nu+2)(\nu+1)\nu \widehat{f}(\nu+2) x^{\nu-1} \\
&= \sum_{\nu \geq 0} (\nu+3)(\nu+2)(\nu+1) \widehat{f}(\nu+3) x^{\nu}
\end{aligned}
$$

$n$ 次微分

$$
\partial^n f = \sum_{\nu \geq 0} \overbrace{(\nu+n)(\nu+n-1)\cdots(\nu+1)}^{n\ \text{ケ}} \widehat{f}(\nu+n) x^{\nu}
$$

$\nu = 0$ は代入できるから，

$$
\begin{aligned}
\partial^n f(0) &= n! \widehat{f}(n) \\
\therefore \quad \widehat{f}(n) &= \frac{\partial^n f(0)}{n!}
\end{aligned}
$$

これは，形式微分作用素によって，$K[[x]]$ の係数が定まることを示している．

## 1.4　合成に関する逆級数

### 1.4.1　合成に関する逆級数

**定義 1.2** 形式的ベキ級数 $f$ に対して，

$$f \circ g = g \circ f = e_1$$

を満たす $g$ が存在すれば，$g$ を**合成に関する逆級数**という．ここで，$f, g$ の位数については，

$$\omega(f),\ \omega(g) \geqq 1$$

**定理 1.3** $f \in K[[x]]$ が合成に関する逆級数 $g \in K[[x]]$ を持つ必要十分条件は，

$$f(0) = 0, \quad \partial f(0) \neq 0$$

を満たすことである．

定理 1.3 を証明した．